

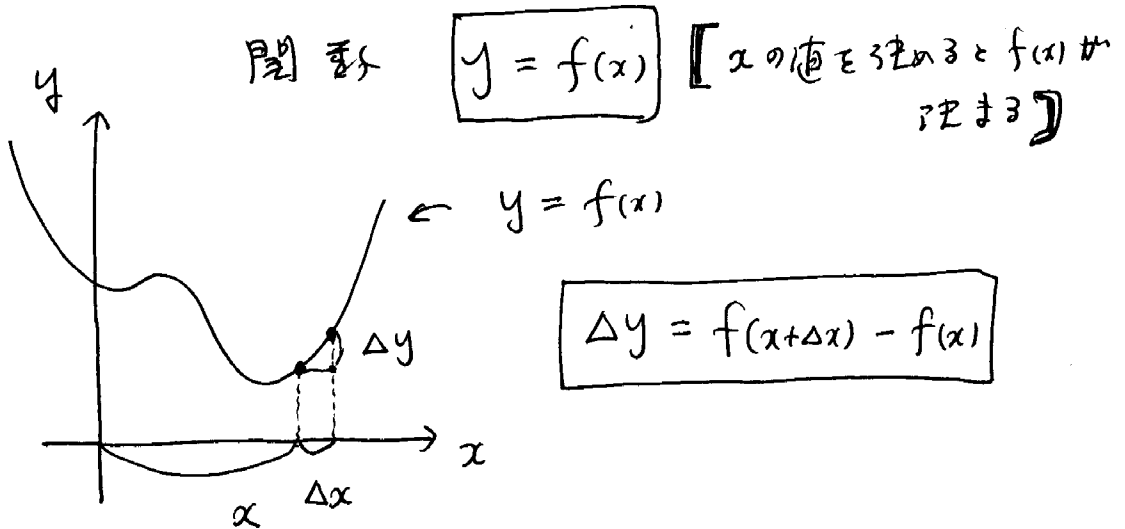
多変数関数

1. (2) について

• 微分とは？

↓
傾きである。

傾き、 x の点における傾き



$$\boxed{\text{傾き}} \equiv \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

↑
(定義)

Δx を 0 に近づける

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

(ただし、 Δx は 0 にならない)

2. 偏微分

2

• 偏微分とは？

【定義】 $f(x, y)$ (2変数関数) がある

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

(y は x と x の微分がある事)

↑ z は y (は定数) がある

同様 (2)

$$\frac{\partial f}{\partial y} \equiv \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

◎ 偏微分は z と x の微分がある



何故必要なのか



非常に便利である!!

【全微分と偏微分】

今 $f(x(t), y(t), t)$ という関数を考える

x, y は t の関数とする

(t から $x(t), y(t)$ を表記)

● 左微分 $\frac{df}{dt}$ の定義

$$\frac{df}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t), t+\Delta t) - f(x(t), y(t), t)}{\Delta t}$$

この(2)

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

と書く事ができる。

*

(証明) 又 $\left\{ \begin{array}{l} \Delta x \equiv x(t+\Delta t) - x(t) \\ \Delta y \equiv y(t+\Delta t) - y(t) \end{array} \right.$ と定義しておく

この時 $\Delta t \rightarrow 0 \sim \Delta x \rightarrow 0$
 $\Delta y \rightarrow 0$ である

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t), t+\Delta t) - f(x(t), y(t), t)}{\Delta t}$$

と書ける。

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \begin{array}{l} \frac{f(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t), t+\Delta t) - f(x(t), y(t+\Delta t), t+\Delta t)}{\Delta t} \\ + \frac{f(x(t), y(t+\Delta t), t+\Delta t) - f(x(t), y(t), t+\Delta t)}{\Delta t} \\ + \frac{f(x(t), y(t), t+\Delta t) - f(x(t), y(t), t)}{\Delta t} \end{array} \right\}$$

右辺第1項は

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x, y(t+\Delta t), t+\Delta t) - f(x, y(t+\Delta t), t+\Delta t)}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0}} \frac{f(x+\Delta x, y, t) - f(x, y, t)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt}$$

と書ける

同様に (2) 右辺第2項は

$$\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

右辺第3項は

$$\frac{\partial f}{\partial t}$$

とある。

よ、よ、よとある。

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

が証明された。

[例題]

$$\underline{f(x, y, t) = t^2 xy}$$

$$\text{且} \begin{cases} x = \cos \omega t \\ y = \sin \omega t \end{cases} \quad \text{と} \text{す}$$

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= t^2 y (-\omega) \sin \omega t + t^2 x \omega \cos \omega t + 2t xy \\ &= -\omega t^2 \sin^2 \omega t + \omega t^2 \cos^2 \omega t + 2t \cos \omega t \times \sin \omega t \\ &= \omega t^2 \cos 2\omega t + t \sin 2\omega t \quad // \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad f(x, y, t) = t^2 \cos \omega t \sin \omega t = \frac{1}{2} t^2 \sin 2\omega t$$

と、

$$\frac{df}{dt} = t \sin 2\omega t + \omega t^2 \cos 2\omega t \quad //$$

両方の結果が一致する。

Note: $x(t), y(t)$ が t の関数として与えられている場合は、(b) の計算が可能。
一般の場合は (a) の計算をする。

3. 3次元空間での多変数関数

- 3次元空間 $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$
- n の関数

$$f(x, y, z)$$

関数の向き: $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$

そこで $\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ を導入する

↑
ナブラ (nabla) とする

$f(x)$ の向きは

$$\nabla f \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

↓ 物理では?

ポテンシャル $U(x)$ とするとき

力 F は

$$\boxed{F = -\nabla U}$$

とやる

(a) Divergence (散)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} \equiv \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

E divergence とは

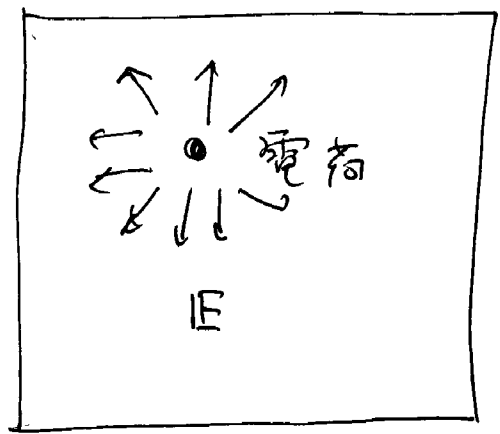
$$(\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z))$$

物理的 0 9 ϵ_0 -

Gauss の法則

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(x)$$

(電場) (電荷密度)



電荷 があると
その電場 E
加わります。

この図から 導き出し 9 より 12 4 2 3

電荷 → リース (源) とは

$$(c) \quad \Delta \equiv \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

(Laplacian)

Δ : 物理の量 ϕ が $\Delta \phi = 0$ を満たす

ポテンシャル



空間の回転に対して不変

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{直角座標})$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]$$

(極座標)

【例題】

$\nabla^2 \frac{1}{r}$ の計算

$$\boxed{\nabla^2 \frac{1}{r} = 0} \text{ を示す.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x}{r^3} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5} \end{array} \right.$$

よって

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = 0 //$$

$$\int_{|r| < a} (\nabla^2 \frac{1}{r}) d^3r = -4\pi$$

を示す。

原点を中心とした半径 a の球内の積分

(証明)

$$I \equiv \int_{|r| < a} (\nabla^2 \frac{1}{r}) d^3r = \int_{|r| < a} \nabla \cdot (\nabla \frac{1}{r}) d^3r$$

222- 数学の Gauss の定理

$$\int_V \nabla \cdot A d^3r = \int A \cdot dS \quad \text{E 用いよ}$$

$$I = \int_S (\nabla \frac{1}{r}) \cdot \mathbf{e}_r \cdot r^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

($|r|=a$ と θ, ϕ)

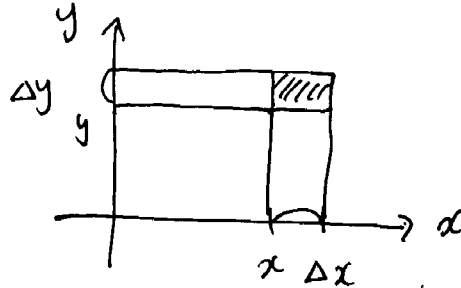
$$= - \int_{|r|=a} \frac{1}{a^2} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r a^2 4\pi = -4\pi$$

$$\therefore \int (\nabla^2 \frac{1}{r}) d^3r = -4\pi \quad \text{Q.E.D.}$$

4. 微小面積

12.

微小面積 $dx \cdot dy$



$$\Delta S = \Delta x \cdot \Delta y \quad \text{微小面積}$$

$$\underline{\Delta x \cdot \Delta x = 0, \Delta y \cdot \Delta y = 0} \quad (\text{は自明})$$

面積の符号も考慮

$$\underline{\Delta x \cdot \Delta y = -\Delta y \cdot \Delta x}$$

(Grassman 代数)

① Jacobian の計算

(a) 2次元

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

d, r

$$\begin{aligned} dx &= \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \\ dy &= \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta \end{aligned}$$

\Rightarrow 27

$$dS = dx \cdot dy = \begin{pmatrix} \cos\theta \, dr - r \sin\theta \, d\theta \\ \sin\theta \, dr + r \cos\theta \, d\theta \end{pmatrix} \\ = r \, dr \cdot d\theta$$

Jacobian $(\vec{x}) = \underline{\underline{r}}$

(b) 3次元

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

d, r

$$\begin{cases} dx = \sin\theta \cos\varphi \, dr + r \cos\theta \cos\varphi \, d\theta - r \sin\theta \sin\varphi \, d\varphi \\ dy = \sin\theta \sin\varphi \, dr + r \cos\theta \sin\varphi \, d\theta + r \sin\theta \cos\varphi \, d\varphi \\ dz = \cos\theta \, dr - r \sin\theta \, d\theta \end{cases}$$

d, r

$$dx \cdot dy \cdot dz = \left[\sin^2\theta (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \sin\theta \right. \\ \left. + \cos^2\theta (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \sin\theta \right] \\ \times r^2 \sin\theta \, dr \cdot d\theta \cdot d\varphi \\ = r^2 \sin\theta \, dr \cdot d\theta \cdot d\varphi //$$