

## 付録B 相対性理論

電磁気学は系の変換性に関して Newton 力学とは本質的に異なっている。古典力学では光の速度は現れないが、電磁気学では光速が重要な役割をしている。Maxwell 方程式は Lorentz 変換に対して不変であるが、この時の変換式に光速がでてくる。相対性理論 (Relativity) はキネマティクス (運動学) なので取り扱いが簡単であり、どの物理のモデルも必ず満たすべきものである。従ってそこから何か新しい物理がでてくると言う事はない。

### B.1 相対性原理

物理学の基本は相対性原理にある。相対性原理とは何か？それは、地上で作られた理論がそれと等速直線運動をしている他の系 (慣性系) においても同様に成り立ち、同じ観測量が得られるべきであると言う要請である。例えば地上でバネの実験をした時、その振動数や振幅が求められる。ここで相対性原理とは等速直線運動をしている電車に乗って同じ条件で同じバネの実験をするとやはり地上と同じ振動数と振幅が観測されるべきであると言うものである。

この相対性原理で最も重要な事はそれぞれの系でそれぞれの座標系を定義できるため、その系に観測者も同時に定義されるという事である。従って、相対論的に不変な理論モデルの計算を行う場合どの系で計算しても答えは同じである事を意味している。従って系を選ぶ時はなるべく計算が簡単になる系を選ぶ事が大切である。さらに、一度、系を指定したらもはや相対論の変換は不要であり、運動方程式の解を観測量と比較する事になる。例えば GPS 衛星の運動では地球の中心を原点とした座標系を指定して運動方程式を解いており、この解から GPS の軌道がすべて決まっている。従ってこの時「GPS 衛星の時間が遅れるか？」などと言う質問は物理的に全く無意味である。

## B.2 ガリレオの相対性理論

今、電車の系である「S-系」が静止系に対して一定速度  $v$  で運動しているとして電車が走る方向を  $x$ -軸としよう。ここで大切な事は、それぞれの座標系には観測者も同時に定義する事ができる事である。ここで静止系の座標と時間を  $R(t, x, y, z)$  と表記し、電車の系の座標を  $S(t', x', y', z')$  と表記しよう。但し、電車は光速  $c$  と比べてゆっくり動いているとしている。この時、2つの座標系には次の関係式がある。

$$x = x' + vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t' \quad (\text{B.1})$$

これを Galilei 変換 (Galilei transformation) という。これは2つの座標系の原点同士の関係式と考えてよい。今、地上 (R-系) で質量  $m$  の質点がバネに繋がれていてこのバネの振動の実験をしたとする。バネの伸びを  $x$  とすると  $m\ddot{x} = -kx$  が運動方程式になる。ここで  $k$  はバネ定数である。電車の系 (S-系) でも同じバネの実験をすると、Galilei 変換から明らかなように運動方程式が  $m\ddot{x}' = -kx'$  となる。ここで  $x'$  はバネの伸びを表す。これは地上で行ったバネの実験と同じであり、その微分方程式の解は

$$\begin{cases} x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \\ x' = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t' \end{cases} \quad \text{但し} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{B.2})$$

となる。ただし、初期条件 ( $t = 0$  で  $x = 0, \dot{x} = v_0$ ) をつけている。相対性理論はこれ以上の事は何も言っていない。この例を見てもわかるように、それぞれの系で観測者の存在を仮定しているが、これが相対性理論の本質である。

## B.3 特殊相対性理論

S-系の速度  $v$  が光速に近い場合の変換則は Lorentz により与えられている。今度の場合、R-系の座標を  $R(t, x, y, z)$  とした時、S-系の座標は  $S(t', x', y', z')$  となり、時間は別のものになる。それは、どの系でも観測者が定義されないといけないので、ある意味では当然である。この場合 Lorentz 変換は

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right), \quad y = y', \quad z = z' \quad (\text{B.3})$$

であり,  $\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$  と定義されている. この式は Maxwell 方程式が S-系でも R-系でも同じ形の微分方程式になるべきであると言う要請を充たす事により導出されている. Lorentz 変換は速度  $v$  が光速と比べて十分小さいと

$$x \simeq x' + vt', \quad t \simeq t', \quad y = y', \quad z = z' \quad (\text{B.4})$$

となり, Galilei 変換を含んでいる事がわかる.

### B.3.1 相対論における速度の和

ここで相対論における速度  $V_1$  と速度  $V_2$  の和を求めよう. まず Lorentz 変換から  $x = \gamma(x' + vt')$ ,  $t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$  であるから, 変換された系での速度は  $V' = V_1$ ,  $v = V_2$  として

$$V \equiv \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + vdt'}{dt' + \frac{v}{c^2}dx'} = \frac{V' + v}{1 + \frac{vV'}{c^2}} = \frac{V_1 + V_2}{1 + \frac{V_1V_2}{c^2}} \quad (\text{B.5})$$

となり, これは単なる和ではない. 勿論, 速度  $V_1, V_2$  が光速と比べて十分小さい場合, これはよく知られている式  $V = V_1 + V_2$  になっている.

### B.3.2 運動量の Lorentz 変換

それでは質点の運動量は Lorentz 変換に対してどの様に影響されるのであろうか? この場合, 運動量とともにエネルギーも一緒に考える必要がある. 今, R-系での質点のエネルギーと運動量を  $(E, \mathbf{p})$  としよう. この時, R-系に対して  $x$ -軸に沿って速度  $v$  で動いている S-系においては, この質点のエネルギーと運動量  $(E', \mathbf{p}')$  はどうなるのであろうか? これは Lorentz 変換により与えられる. すなわち

$$p_x' = \gamma\left(p_x - \frac{vE}{c^2}\right), \quad E' = \gamma(E - vp_x), \quad p_y' = p_y, \quad p_z' = p_z \quad (\text{B.6})$$

である. この時,  $E^2 - \mathbf{p}^2c^2$  を計算すると  $E'^2 - \mathbf{p}'^2c^2 = E^2 - \mathbf{p}^2c^2$  となり, 一定値となる. この一定値は何であらうか? これは系の変換によらない量であり, 質点を考える場合, その質量しかあり得ない事がわかる. 従って

$$E'^2 - \mathbf{p}'^2c^2 = E^2 - \mathbf{p}^2c^2 = (mc^2)^2 \quad (\text{B.7})$$

と書く事ができる．ここで，運動量  $\mathbf{p}$  がその質量と比べて十分小さい場合，

$$E = \sqrt{(mc^2)^2 + \mathbf{p}^2 c^2} = mc^2 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \dots \quad (\text{B.8})$$

となり，確かに非相対論の「分散関係式」が得られる事がわかる．質点のエネルギーがその運動量とどのような関係式で表されているかを示す式を分散関係式という．これは物理では非常に重要な関係式となっている．

### B.3.3 微分量の Lorentz 変換

Lorentz 変換  $x = \gamma(x' + vt')$ ,  $t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$  に対して微分の変換式は

$$\frac{\partial}{\partial x} = \gamma \left( \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right), \quad \frac{\partial}{\partial t} = \gamma \left( v \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\partial}{\partial t'} \right) \quad (\text{B.9})$$

となる．但し  $y, z$  は変更を受けないので表示していない．ここで  $p_x = -i \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $E = i \frac{\partial}{\partial t}$  と定義してみると

$$p_x = \gamma \left( p_x' + \frac{vE'}{c^2} \right), \quad E = \gamma (E' + vp_x') \quad (\text{B.10})$$

となりエネルギー・運動量の変換則と一致している．よって4次元の内積

$\boxed{px \equiv Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}$  が

$$px = Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = p'_x t' = E' t' - \mathbf{p}' \cdot \mathbf{r}' \quad (\text{B.11})$$

のように Lorentz 変換に対して不変である事がわかる．

## B.4 運動方程式の変換不変性

粒子の運動を記述する運動方程式はどの慣性系でも同じ形をしている事が相対性理論の基本原則である．ここでは，Newton 方程式と Maxwell 方程式が Galilei 変換と Lorentz 変換に対してどのように振舞っているのかを具体的に見て行こう．そうすれば変換した時の形がいかに大切であるか良くわかると思う．

• Newton 方程式と Galilei 変換： Galilei 変換の場合，変換則は  $x = x' + vt'$ ,  $t = t'$  である．Newton 方程式を変換してみると

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad \rightarrow \quad m \frac{d^2 x'}{dt'^2} = -\frac{\partial U}{\partial x'} \quad (\text{B.12})$$

となり，方程式は不変である事がわかる．

• Newton 方程式と Lorentz 変換： Lorentz 変換の場合，  
 $x = \gamma(x' + vt')$ ，  $t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$  となっている．従って，座標の時間微分は

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx' + vdt'}{dt' + \frac{v}{c^2}dx'} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}} \quad (\text{B.13})$$

さらに 2 階微分は

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{\gamma(dt' + \frac{v}{c^2}dx')} d\left(\frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}}\right) = \frac{\frac{d^2x'}{dt'^2}}{\gamma^3\left(1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}\right)^3} \neq \frac{d^2x'}{dt'^2} \quad (\text{B.14})$$

となり，Newton 方程式は全く別物になっている．すなわち，Newton 方程式は Lorentz 変換に対して不変ではない．

• Maxwell 方程式と Galilei 変換： Maxwell 方程式の Galilei 変換による性質を考えるためには，物質が無いときで十分である．この時，Maxwell 方程式は電場  $E$  に対して

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) \mathbf{E} = 0 \quad (\text{B.15})$$

となっている．Galilei 変換の式は  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'}$ ，  $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - v\frac{\partial}{\partial x'}$  となるので

$$\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t'} - v\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2 - \nabla'^2\right] \mathbf{E}' = 0 \quad (\text{B.16})$$

と変換され，Maxwell 方程式は Galilei 変換に対して不変ではない事がわかる．

• Maxwell 方程式と Lorentz 変換： Lorentz 変換においては

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \nabla'^2 \quad (\text{B.17})$$

であるから，Maxwell 方程式が Lorentz 変換に対して不変である．

## B.5 相対性理論の具体例

ここで相対論の具体例をあげるのだから相対性理論に慣れて欲しいと思う．しかし観測しているのは地上であり，相対性理論の変換性から他の慣性系のある種の情報がわかる場合があるという事を示しているだけである．相対性理論は運動学であり，それ以上の情報がわかるものではない．

### B.5.1 大気圏で生成された $\mu$ -粒子 (muon) 測定

大気圏に突入した高エネルギー陽子は空気と衝突して、結果的に  $\mu$ -粒子 (質量  $m_\mu = 0.1056 \text{ GeV}/c^2$ ) を生成することがある。 $\mu$ -粒子は  $2 \times 10^{-6}$  秒程度の寿命を持つ不安定な素粒子なので光速で走っていたとしても走る距離は約 700 m である。しかし  $\mu$ -粒子の系の時間は地上の観測者の時間とは異なり  $\gamma$  倍だけ遅れている。地上でみるとその分寿命がのびて走る距離も伸びる事になる。例えば生成された  $\mu$ -粒子のエネルギーが  $E = 1 \text{ GeV}$  であったとしよう。この時の Lorentz 変換の式における  $\gamma$  は  $\mu$ -粒子の運動量が  $p = \sqrt{E^2 - m_\mu^2 c^2}/c \simeq 0.994 \text{ GeV}/c$  となる事から

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (p/E)^2}} \simeq \frac{1}{\sqrt{1 - 0.994^2}} \simeq 9.5 \quad (\text{B.18})$$

となり、従って  $\mu$ -粒子の系では時間が 9.5 倍だけ遅れることがわかる。この事から、地上の系では  $\mu$ -粒子が走る距離が 9.5 倍伸びる事になり、この場合は地上で  $\mu$ -粒子が観測される可能性がある事がわかる。

### B.5.2 光のドップラー効果

星が高速で遠ざかっている時、その星から発せらる光は Lorentz 変換の影響を受ける事になる。それは、光のドップラー効果としてよく知られている現象であるし、また観測もされている。基本的には音のドップラー効果と同じであるが、光の場合媒質がないため音の場合よりもよりシンプルである。星が速度  $v$  で遠ざかっていると、星から発せられた光の運動量を  $p$  とすると地球上で観測される光の運動量  $p'$  は

$$p' = \gamma \left( p - \frac{vE}{c^2} \right) = \gamma \left( p - \frac{vp}{c} \right) = \frac{p \left( 1 - \frac{v}{c} \right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = p \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \quad (\text{B.19})$$

となり、光の運動量は減少している。これを波長で表せば

$$\lambda' = \lambda \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \quad (\text{B.20})$$

となるので光の波長は大きくなり、これを赤方遷移 (Red Shift) という。可視光では赤っぽい光は波長が長く、青っぽい光は波長が短いからである。また場

の理論で赤外発散，紫外発散という言葉が良く出てくるが，この発散は物理量の運動量積分から来ていて，運動量がゼロの時に積分が無限大になる時赤外発散と呼び，運動量が大きい時の発散を紫外発散と呼んでいる．これは単なるネーミングであり，物理的な意味は全く無い．

### B.5.3 相対性理論の適用範囲

理論の模型を作った時に大切な事は，その模型の適用範囲を常にしっかり理解して抑えて置く事である．これはどんな場合でも重要であり，特に相対性理論においてはその適用範囲を吟味しておく必要がある．

- 双子のパラドックス： 双子のパラドックスのような物理的な観測量が不明瞭な場合は，物理学の議論の対象にはならず，無意味な設問である．静止系の観測者が他の慣性系における物理量を計算する事はできないし，そもそも物理的に意味がない事である．
- GPS 衛星の系： 地上で観測できる最速の物体は衛星であろう．しかし例えば GPS 衛星は地球の重力の下で束縛状態になっている．従ってすでに系が指定されており，GPS 衛星の運動が特殊相対論の対象になる事は勿論ない．
- キネマティクスとダイナミクス： 相対性理論は「キネマティクス」であり，物理の「ダイナミクス」とは直接の関係はない．しかしどの理論模型も必要なキネマティクスの条件を満たしていなければ模型の意味はない．例えば，どの理論模型も当然 Lorentz 変換に対して不変である必要がある．これが破れていると，系を決めて計算を実行した時，その系ごとに異なった結果が出てしまう事になる．しかしながら，Lorentz 変換に対して不変である模型は，どの系で計算しても物理的な観測量は当然同じになる．従って計算を実行する時はなるべく計算が簡単になるような系を選ぶ事が大切である．

## B.6 一般相対論

ここで簡単に一般相対論を解説しておこう。今となっては不要な理論ではあるがしかし相対性原理とどのような点で矛盾しているのかがわかれば、逆に相対性理論をより深く理解できるものと思われる。

### B.6.1 一般相対論の方程式

重力場に対する Poisson 型方程式は式 (E.18) のように  $\nabla^2 \mathcal{G} = mg\rho_g$  と書かれている。Einstein はこれでは不十分と思い、これを電磁場のようなベクトルかテンソルの方程式に拡張したかったのである。このため、計量テンソル  $g^{\mu\nu}$  という量を導入する。通常空間 (Minkowski space) で Lorentz 不変な微分量は  $(ds)^2 = (dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2$  である。計量テンソルは座標の関数  $g^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}(t, \mathbf{r})$  でもあり、時空の計量として

$$(ds)^2 = g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu, \quad x^\mu = (t, \mathbf{r}) \quad \text{と導入された。} \quad (\text{B.21})$$

ただし、物理的な意味は不明である。Minkowski 空間の場合  $g^{\mu\nu}$  は  $g^{00} = 1, g^{11} = -1, g^{22} = -1, g^{33} = -1$ , それ以外ゼロである。  
一般相対論の方程式は

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = 8\pi G_0 T^{\mu\nu} \quad (\text{B.22})$$

と書かれていて  $G_0$  は定数である。ここで  $R^{\mu\nu}$  は Ricci テンソルとよばれる量で計量テンソル  $g^{\mu\nu}$  で書かれている。すなわち、式 (B.22) の左辺は全て  $g^{\mu\nu}$  で書かれていて、この計量テンソルが未知関数となっている。

● エネルギー・運動量テンソル：  $T^{\mu\nu}$  は物質のエネルギー・運動量テンソルと呼ばれるものであり、基本的には物質の質量である。この式 (B.22) は結局のところ質量があったら計量テンソルがこの方程式から決定されると言っているものである。この量を自然現象 (観測量) と関係付ける事は非常に難しい。また「空間の計量に関する観測事実とは何か？」と言う疑問に答える事はとてもできない事である。従って、この理論には実験的な根拠は何処にもなく、恐らくはそれ以前の問題であり、Maxwell 方程式と好対照を示している。



## B.6.2 一般相対論の問題点

しかし最も深刻な問題は相対性原理との矛盾である。「質量があると計量が変わる」と一般相対論の方程式 (B.22) は主張しているが、この場合の  $g^{\mu\nu}$  は式 (B.22) からわかるように、物質の全質量の重力中心を原点として測定されている。従って、ある星の計量と他の別の星の計量が異なってしまう、これは最も重要な相対性原理を破っている事に対応している。これは物理学として到底、容認できる事ではない。

- Gedanken Experiment (思考実験) : Einstein が理論を作る根拠にしたのが「Gedanken Experiment」である。これは実験から出発した Maxwell 方程式とは異なり、等価原理をその出発点に選んでいる。このため一般相対論は自然界と遊離した理論体系になってしまったのである。科学は常に現象(実験)から出発してそれを基礎にした理論体系を構築する事が絶対条件である。

- 一般相対論は粒子描像 : 電磁気学は場の理論であるが、一般相対論は粒子の描像に基づいており場の理論ではない。そもそもここで扱っている「時間・空間」の意味がよくわからない。恐らくは慣性系を記述する時に使った座標系と関係しているものと考えられるが、それは物理量を記述する「言語」であり、自然界とは関係していない。その意味においても、電磁気学は極めて正常で自然界を記述できる正しい理論である事を痛感するものである。

- 微分幾何学 : 一般相対論の方程式は微分幾何学を使っている。これは当時すでに完成されていた数学の理論体系である。しかし数学は「言語」であり数学で表現しようとしている  $n$ -次元空間とはあくまでも数学で定義された空間である。実際の現実空間と関係付けられるのは勿論、3次元空間だけである。例えば、1次元空間といってもこれは仮想的なものである。場の理論を本当に1次元空間であるとして解く事は数学的には非常に面白い事であるし、また場の理論の基本的な構造を理解する練習場としては最高である [3]。しかしながら、この1次元場の理論の模型は実際の物理現象との接点はない。

## 関連図書

- [1] 西島和彦, 「相対論的量子力学」, (培風館, 1973)
- [2] K. Nishijima, “Fields and Particles”, (W.A. Benjamin, INC, 1969)
- [3] T. Fujita, “Symmetry and Its Breaking in Quantum Field Theory”  
(Nova Science Publishers, 2011, 2nd edition)
- [4] T. Fujita and N. Kanda,  
“Fundamental Problems in Quantum Field Theory”  
(Bentham Publishers, 2013)
- [5] T. Fujita, M. Hiramoto and H. Takahashi,  
“Bosons after Symmetry Breaking in Quantum Field Theory”  
(Nova Science Publishers, 2009 )
- [6] “New Fundamentals in Fields and Particles”  
T. Fujita (Editor ), (Transworld Research Network, 2008)
- [7] J.D. Bjorken and S.D. Drell, “Relativistic Quantum Mechanics”,  
(McGraw-Hill Book Company,1964)
- [8] J.J. Sakurai, ” Advanced Quantum Mechanics”, (addison-Wesley,1967)
- [9] B.W. Parkinson and J.J. Spilker, “Global Positioning System”,  
Progress in Astronautics and Aeronautics (1996)
- [10] Simon Newcomb, “Tables of the Four Inner Planets”,  
2nd ed. (Washington: Bureau of Equipment, Navy Dept., 1898).
- [11] B.G. Bills and R.D. Ray , “ Lunar Orbital Evolution:  
A Synthesis of Recent Results ”,  
Geophysical Research Letters 26 (19): 3045-3048 (1999)