

量子力学 I 中間試験 (2) (2007.12.18)

学生番号 \_\_\_\_\_ 氏名 \_\_\_\_\_

1次元調和振動子のハミルトニアン  $\hat{H}$  は  $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$  である。  
この時、オペレータ  $a, a^\dagger$  を次のように導入する。

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\hat{p}, \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\hat{p}$$

- (a)  $a, a^\dagger$  の交換関係  $[a, a^\dagger]$  を計算せよ。ただし、 $[x, \hat{p}] = i\hbar$  である。
- (b) 数演算子を  $\hat{N} = a^\dagger a$  と定義する時、 $[\hat{N}, a^\dagger]$  を計算せよ。
- (c)  $\hat{N}$  の固有関数および固有値を  $\phi_n, n$  とする ( $\hat{N}\phi_n = n\phi_n$ )。  
この時、 $a^\dagger\phi_n$  も  $\hat{N}$  の固有関数になっている事を示せ。
- (d)  $\hat{N}$  の固有値  $n$  の最小値は 0 であり、その固有関数は  $\phi_0$  である。  
この時、 $a^\dagger\phi_0$  の状態に対して、 $\hat{N}$  の固有値はいくらか？

(ヒント : 交換関係の定義は  $[A, B] \equiv AB - BA$  である。  
また、 $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$  である。)