# ベクトル解析

## 1. はじめに

ベクトルとは何か?

『ベクトルとは空間に描かれた矢印』

(浜田先生)

↓

$\mathbf{r} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$

並べて書いたもの

このベクトルに演算が定義できる

(1) 定数を $a$ として

$a\mathbf{r} = (ax, ay, az)$ の事

(2) 2個のベクトルに対して

$$\begin{cases} \mathbb{r}_1 = (x_1, y_1, z_1) \\ \mathbb{r}_2 = (x_2, y_2, z_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{(a) 足し算} : \quad \mathbb{r}_1 + \mathbb{r}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ \text{(b) 引き算} : \quad \mathbb{r}_1 - \mathbb{r}_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2) \end{cases}$$

(3) 掛け算は ?

内積 (スカラー積ともいう)

外積 (3次元ベクトルの時)
(ベクトル積ともいう)

# 2. 内積

$\mathbb{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ , $\mathbb{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ の時

内積: $\boxed{\mathbb{r}_1 \cdot \mathbb{r}_2 \equiv x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}$

(定義の意味)

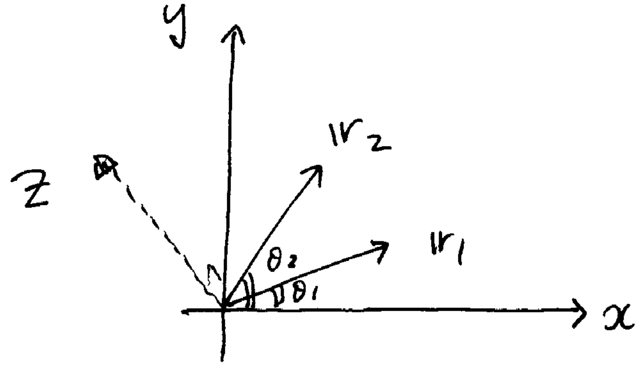
$n$ 次元ベクトルだと

$$\begin{cases} \mathbb{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \\ \mathbb{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n) \end{cases}$$ として

内積: $\mathbb{a} \cdot \mathbb{b} \equiv a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$

$$\equiv \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$ とも書く.

• 3次元ベクトル：必ず1つの平面に
2つのベクトルをもってこれる.




この時 $\begin{cases} r_1 = (x_1, y_1, 0) \\ r_2 = (x_2, y_2, 0) \end{cases}$ となっている.

$\begin{cases} r_1 \text{のベクトルの長さを } r_1 \\ r_2 \quad \text{〃} \quad r_2 \end{cases}$ とする.

このとき $\begin{cases} x_1 = r_1 \cos\theta_1 \\ x_2 = r_2 \cos\theta_2 \end{cases}$, $\begin{cases} y_1 = r_1 \sin\theta_1 \\ y_2 = r_2 \sin\theta_2 \end{cases}$

よって
$$
\begin{aligned}
r_1 \cdot r_2 &= x_1 x_2 + y_1 y_2 \\
&= r_1 r_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 + r_1 r_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2 \\
&= r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\
&= r_1 r_2 \cos\theta
\end{aligned}
$$
($\theta$ は $r_1$ と $r_2$ の角度)

ベクトルの長さ　$|\mathbb{r}|$

$$\mathbb{r} = (x \;\; y, z)$$

$$\mathbb{r}^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

$$|\mathbb{r}| \equiv r = \sqrt{(\mathbb{r} \cdot \mathbb{r})}$$

内積は単なる数

◎ ベクトル表記

$$\begin{cases} \mathbb{r} = (x, y, z) \text{ と書いたが} \\ \mathbb{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ とも書く} \end{cases}$$

ベクトルを行列の一部としてみる時は

$$\begin{cases} \mathbb{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ が普通} \\ \mathbb{r}^t = (x, y, z) \text{ となる.} \end{cases}$$

転置行列

## 3、外積（ベクトル積ともいう）

単位ベクトル　$\mathbb{e}_x$ , $\mathbb{e}_y$ , $\mathbb{e}_z$

（$\mathbb{i}$ , $\mathbb{j}$ , $\mathbb{k}$ ）とも書く

$$\begin{cases} |\mathbb{e}_x| = 1 \\ |\mathbb{e}_y| = 1 \\ |\mathbb{e}_z| = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbb{e}_x = (1, 0, 0) \\ \mathbb{e}_y = (0, 1, 0) \\ \mathbb{e}_z = (0, 0, 1) \end{cases}$$

よって

$\mathbb{r} = x\mathbb{e}_x + y\mathbb{e}_y + z\mathbb{e}_z$　とも書ける

◎ 外積の定義：
$$\begin{cases} \mathbb{e}_x \times \mathbb{e}_y = \mathbb{e}_z \\ \mathbb{e}_y \times \mathbb{e}_z = \mathbb{e}_x \\ \mathbb{e}_z \times \mathbb{e}_x = \mathbb{e}_y \end{cases}$$
とする

但し　$\boxed{\mathbb{e}_x \times \mathbb{e}_y = - \mathbb{e}_y \times \mathbb{e}_x}$　とする

従って　$\boxed{\mathbb{e}_x \times \mathbb{e}_x = 0}$

$$\begin{cases} \mathbb{a} = a_x \mathbb{e}_x + a_y \mathbb{e}_y + a_z \mathbb{e}_z \\ \mathbb{b} = b_x \mathbb{e}_x + b_y \mathbb{e}_y + b_z \mathbb{e}_z \end{cases}$$ とすると

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbb{a} \times \mathbb{b} &= (a_y b_z - a_z b_y)\mathbb{e}_x \\ &+ (a_z b_x - a_x b_z)\mathbb{e}_y \\ &+ (a_x b_y - a_y b_x)\mathbb{e}_z \end{aligned}}$$ となる

これは行列式で書くと

$$\boxed{\mathbb{a} \times \mathbb{b} = \begin{vmatrix} \mathbb{e}_x & \mathbb{e}_y & \mathbb{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}}$$ と書ける

# 【外積の性質】

$$\begin{cases} \mathbb{a} \times \mathbb{b} = -\mathbb{b} \times \mathbb{a} \\ \text{よって} \quad \mathbb{a} \times \mathbb{a} = 0 \\ |\mathbb{a} \times \mathbb{b}| = |\mathbb{a}| \cdot |\mathbb{b}| \cdot \sin\theta \end{cases}$$

- $\mathbb{e}_x, \mathbb{e}_y, \mathbb{e}_z$ のかわりに
  $\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2, \mathbb{e}_3$ とも書く。

$$\begin{cases} \mathbb{a} = a_1\mathbb{e}_1 + a_2\mathbb{e}_2 + a_3\mathbb{e}_3 = (a_1, a_2, a_3) \\ \mathbb{b} = b_1\mathbb{e}_1 + b_2\mathbb{e}_2 + b_3\mathbb{e}_3 = (b_1, b_2, b_3) \end{cases}$$

◎ $|\mathbb{a} \times \mathbb{b}| = |\mathbb{a}| \cdot |\mathbb{b}| \sin\theta$ の証明

(証) $|\mathbb{a} \times \mathbb{b}|^2 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2$

$= a_1^2 (b_2^2 + b_3^2) + a_2^2 (b_3^2 + b_1^2) + a_3^2 (b_1^2 + b_2^2) - 2(a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2 a_3 b_2 b_3 + a_3 a_1 b_3 b_1)$

$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - a_1^2 b_1^2 - a_2^2 b_2^2 - a_3^2 b_3^2 - 2(a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2 a_3 b_2 b_3 + a_3 a_1 b_3 b_1)$

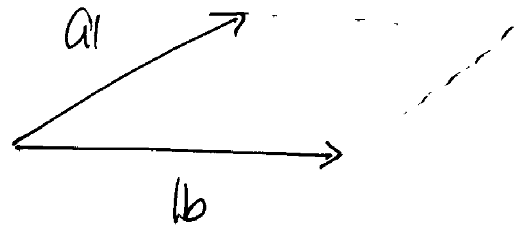
$= |\mathbb{a}|^2 |\mathbb{b}|^2 - (\mathbb{a} \cdot \mathbb{b})^2$

$= |\mathbb{a}|^2 |\mathbb{b}|^2 (1 - \cos^2\theta)$

$= |\mathbb{a}|^2 |\mathbb{b}|^2 \sin^2\theta$

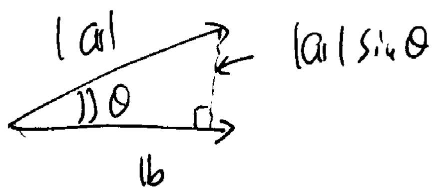
$\therefore |\mathbb{a} \times \mathbb{b}| = |\mathbb{a}||\mathbb{b}| \sin\theta$ //

# 【ベクトルの幾何学】




$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ は $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が作る平行四辺形の面積

(証) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin\theta$




よって 面積 $S = |\mathbf{a}| \sin\theta \cdot |\mathbf{b}|$

$= |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ //

$S = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$ でもある

(証) $\begin{cases} \mathbf{a} = (a_1, a_2, 0) \\ \mathbf{b} = (b_1, b_2, 0) \end{cases}$ として十分.

よって $S = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$

## 4、公式を覚える

//

重要な公式は必ず覚える事

- $$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b} = &(a_2b_3-a_3b_2)\mathbf{e}_1\\ &+(a_3b_1-a_1b_3)\mathbf{e}_2\\ &+(a_1b_2-a_2b_1)\mathbf{e}_3\end{aligned}}$$

- $$\boxed{\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}}$$ (明らか)

- $$\boxed{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}}$$

(証明) 左辺 $= a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)$

$$= (a_2b_3-a_3b_2)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_3$$

$$= \mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$$ //

- $$\boxed{\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})}$$

(証明) $[\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]_3$ 一成分を計算する

$$= a_1(\mathbf{b}\times\mathbf{c})_2-a_2(\mathbf{b}\times\mathbf{c})_1$$

$$= a_1(b_3c_1-b_1c_3)-a_2(b_2c_3-b_3c_2)$$

$$= (a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)b_3-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)c_3$$

$$= [(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}]_3$$ //

No.

Date



## 5. 結び

Newton 方程式は

- ベクトルで書くと $\boxed{m\ddot{\mathbb{r}} = \mathbb{F}}$ となる
- 成分表示で書くと $\boxed{m\ddot{x}_i = F_i}$ $(i=1,2,3)$ となる

ベクトル表記の長所 : 覚え易い
みた目にわかり易い

ベクトル表記の短所 : 複雑な計算には不利
成分の方が便利