

プラズマ中の渦構造形成

核融合科学研究所 田中雅慶

1. はじめに

渦はどこまで分っているのだろうか？ソリトンのように、非線形性と分散性が釣り合って構造を作るというような、普遍的な描像が得られているのだろうか。[1,2] 残念ながらまだそこまでは到達していないというのが現状である。そもそも渦を何によって定義するかという問題も、厳密に考えると難しい。通常、渦といえば流体がある点の周りに回転している様子を念頭におく。しかし、渦度 ($\omega \equiv \text{rot } v$) を用いてこれを数値的に表そうとすると直感的なイメージとずれてくることがある。たとえば、渦糸が作る周方向の回転速度は半径に反比例 ($v_\theta \propto 1/r$) するが、この速度場の渦度は0である。また、2枚の平行板の間につくられる平行せん断流の渦度は有限であるが流体は回転していない。

ここではとりあえず、局在した渦度の構造が渦であるという定義をすることにしよう。前の例でいえば、渦糸は中心が特異点になっていて、渦度分布はデルタ関数で与えられるので、渦に分類される。一方、平行せん断流は渦度がどこでも一定なので渦でないということになる。

プラズマは非常に渦をつくりやすい媒質である。磁場が加わったプラズマでは、磁場に垂直な面内に $F \times B$ ドリフトが存在するので、このドリフト運動が回転運動を形成する。最も重要な役割を果たすのは電場による $E \times B$ ドリフトである。ポテンシャルがボルツマン関係を満たしているとする、ポテンシャルと摂動密度は比例関係にあるので、大まかに言って、プラズマ中に密度揺動があれば、渦が発生していると言ってよい。したがって、プラズマにおける渦の研究は、密度揺動の原因となる静電波の構造の研究と考えることもできる。このような観点から、磁化プラズマ中で最も重要な静電波であるドリフト波の渦の研究が行われてきた。[3]

最も簡単に理想化された渦は渦糸である。渦糸はその中心にデルタ関数の渦度を持ち、その外側はいたるところ渦度0である。渦糸どうしは、お互いの速度場によって運ばれる（流される）ような相互作用を行う。あとで示すように、渦糸の運動はハミルトンの正準方程式で表現できる。つまり、力学の問題に置き換えることができる。このため、複雑な渦の振舞いを理解するのに、現実の渦を渦糸で置き換えて定性的な理解を得るというようなことがしばしば行われる。最近非中性プラズマを用いて、渦糸や渦糸の集合を実験で精度よく実現できるようになった。渦糸の運動に関する興味深い結果が得られている。[4]

プラズマに粘性（散逸）があれば、渦の形成はどう変わるだろうか？実は、渦研究における粘性の重要さはこれまでほとんど考慮されることがなかった。ある実験がきっかけとなって粘性のあるプラズマ中の渦が見つかった。そこでは、粘性流体中の渦としての共通の構造と、プラズマ固有の特異な現象が共存する渦の姿が明らかになってきた。

この講演では渦糸、ドリフト渦、散逸性渦について解説する。なお、非中性プラズマの渦や、ドリフト渦とロスビー渦の関係、磁気流体中の渦など本講演で省略した部分についてはプラズマ核融

合学会誌小特集「プラズマ中の渦とその相互作用」に詳しい解説が載っているので参考にするとよい。[5]

2. 渦度方程式

流体方程式から出発して渦度の方程式を求めてみよう。簡単のため、外部磁場は一様定常で、プラズマの変動による磁場の変化もないと仮定する。粘性は有限であるとして一般的な渦度方程式を導く。イオンの運動方程式を考えると

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{e}{M} \nabla \phi + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega} + \nu \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (1)$$

となる(第2粘性係数は0とした)。ここで、 ρ は質量密度、 p は圧力、 ϕ はポテンシャル、 $\boldsymbol{\Omega}$ はイオンサイクロトロン周波数の大きさを磁場方向を向いたベクトル、 ν は動粘性係数である。両辺に rot を作用させ、ベクトル解析の公式 $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla(v^2/2) - \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{v}$ を用いると

$$\frac{\partial(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega})}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{v} \times (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega})) = \frac{1}{M} \nabla n \times \nabla p + \nu \Delta(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}) \quad (2)$$

を得る。ここで、 $\boldsymbol{\Omega} = \text{const.}$ を利用して、 Δ の中に $\boldsymbol{\Omega}$ が付加されている。ここで、 $\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}$ を新しく定義された渦度 $\boldsymbol{\omega}'$ と考えると、方程式の形は通常流体の場合と同じになる。

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}'}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}') + \frac{1}{\rho} \nabla n \times \nabla p + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}' \quad (3)$$

$(1/\rho) \nabla n \times \nabla p$ の項は傾圧項(baroclinic term)と呼ばれ、渦度を生成する項である。竜巻の形成などでは重要な役割を果たす項である。ここでは、簡単のために ∇n と ∇p は平行なベクトルと考えて0としよう。

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}'}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}') + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}' \quad (4)$$

この方程式が渦度方程式である。非粘性流体を考える場合には、右辺第2項をおとしたものを渦度方程式と呼んでいる。 $\boldsymbol{\omega}'$ と $\boldsymbol{\omega}$ は磁場が一様定常な場合には、定ベクトルだけの差しかない。したがって、以下では $\boldsymbol{\omega}'$ と $\boldsymbol{\omega}$ の区別はせず、 $\boldsymbol{\omega}'$ をプラズマの流体運動による渦度であると考えよう。記号“'”も省略する。

ここで、実験の観点から渦度方程式を用いる利点を述べておこう。プラズマのダイナミクスは、連続の式と運動方程式で記述される。この中に含まれる物理量は、密度、速度ベクトル、圧力(温度)、ポテンシャルの4種類である。実験的にこれらのすべてを得ようとすると測定の手間はかなりのものになる。一方、渦度方程式は速度ベクトルだけで(渦度は速度ベクトルから導くことができる)で閉じている。したがって渦に関する限り、渦度方程式で物事を考える方が実験の手間が大いに簡単化されるのである。それでも速度ベクトルの3成分を空間の各点で測るのは容易なものではない。

ベクトル解析の公式を使って右辺第 1 項を展開すると

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \boldsymbol{v} - \boldsymbol{\omega} \nabla \cdot \boldsymbol{v} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega} \quad (5)$$

のようになる。

ここで、(5)式の各項の意味を考えてみる。磁力線を用いて磁場を考えるのに倣って、渦度の場を“渦糸”の集合と考えてみよう。 $\boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}$ は流れ \boldsymbol{v} によって“渦糸”が運ばれる項を表しており convective term と呼ばれる。 $\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \boldsymbol{v}$ は渦糸の向きに流れが運ばれる(引伸ばされる)項を表していて stretching term と呼ばれる。 $\boldsymbol{\omega} \nabla \cdot \boldsymbol{v}$ はプラズマの圧縮や膨張に伴って渦糸の密度を増減させる項を表している。この項は、水などの非圧縮性流体では無視できるが、プラズマの場合、常に無視できるとは限らない。 $\nu \Delta \boldsymbol{\omega}$ は粘性による渦糸の拡散を表している。

非圧縮性・非粘性の場合は特に簡単になって

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \boldsymbol{v} \quad (6)$$

となる。プラズマの運動が $E \times B$ ドリフトだけで決まる場合には、磁場に垂直方向の 2 次元系と見なすことが出来る。静電ポテンシャルを ϕ とすると、速度ベクトルは

$$\boldsymbol{v} = \frac{c}{B} \boldsymbol{e}_z \times \nabla \phi \quad (7)$$

で与えられる。したがって渦度 $\text{rot } \boldsymbol{v}$ は z 成分だけで

$$\omega = -\frac{c}{B} \Delta \phi = \frac{c}{B} 4\pi \rho_e \quad (8)$$

となり、電荷密度 ρ_e に直接比例する。ここで最後の式はポアソン方程式を用いている。この関係は、速度ベクトルを測ることなく渦度を決定できるので、実験的には非常に有用な関係式である。ただし、この関係式は運動が $E \times B$ ドリフトだけで決まる非中性プラズマのような場合に成り立つ関係式であることに注意する必要がある。一般の場合には速度ベクトルを測らなければならない。

渦度方程式(6)に代入すると

$$\frac{\partial \Delta \phi}{\partial t} + [\Delta \phi, \phi] = 0 \quad (9)$$

となる。ここで $[f, g]$ はポアソン括弧式 $\partial f / \partial x \cdot \partial g / \partial y - \partial f / \partial y \cdot \partial g / \partial x$ である。この方程式はオイラー流体の流線関数が満たす方程式と同じである。[6] したがって、 $E \times B$ ドリフトしているプラズマは 2 次元非圧縮性・非粘性流体(オイラー流体)と等価な系である。静電ポテンシャル ϕ は流線関数の役目を果たす。

3 . 渦糸

ある場所 x_i で渦度の強さが Γ_i であり、その他は至るところ渦度 0 であるような場合を考えてみよ

う。(8)式を見易くするため以下の規格化を行う。 $x/\rho_s \rightarrow x$ 、 $e\phi/T_e \rightarrow \phi$ 、ここで ρ_s は等価イオンラーマ半径 $\rho_s = C_s/\Omega$ (C_s :イオン音波速度)である。この場合、あたらしい渦度および速度はそれぞれ無次元化され $\omega/\Omega \rightarrow \omega$ 、 $v/C_s \rightarrow v$ となる、

$$\omega = \Gamma_i \delta(x - x_i) = \Delta\phi \quad (10)$$

2次元のラプラス方程式を解くと、

$$\phi = \frac{\Gamma_i}{2\pi} \log r \quad r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i| \quad (11)$$

となる。渦糸が誘起する渦の流れ場 $\mathbf{e}_z \times \nabla\phi$ は x_i を中心に回転する流れで、その強さは $1/r$ に比例して減少していく、

$$\mathbf{v} = \frac{\Gamma_i}{2\pi} \mathbf{e}_z \times \nabla \log r = \frac{\Gamma_i}{2\pi} \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \quad (12)$$

多くの渦糸がある場合、(11)はそれぞれの渦に関して和を取ればよい。

渦の集団の中である一つの渦糸 k に着目してその運動を考えよう。渦糸の運動は(6)式から分かるように ($\partial\omega/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla\omega = d\omega/dt = 0$)、流れに沿って変化しない、つまり \mathbf{v} によって流される。したがって、渦糸 k は、他の渦糸が渦糸 k の所に作る流れによって流される、

$$\begin{aligned} \frac{dx_k}{dt} &= (\mathbf{e}_z \times \nabla\phi_k)_x = \frac{\partial\phi_k}{\partial y_k} \\ \frac{dy_k}{dt} &= (\mathbf{e}_z \times \nabla\phi_k)_y = -\frac{\partial\phi_k}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (13)$$

となる。ここで ϕ_k は(11)から以下のように与えられる。

$$\phi_k = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j \neq k} \Gamma_j \log r_{kj} \quad r_{kj} = |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k| \quad (14)$$

いま、 $x_1, x_2, x_3 \dots$ の関数として

$$H = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j < k} \sum \Gamma_j \Gamma_k \log r_{kj} \quad (15)$$

を導入すると、それぞれの渦糸の運動はハミルトンの正準方程式で書ける。[7]

$$\begin{aligned} \Gamma_k \frac{dx_k}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial y_k} \\ \Gamma_k \frac{dy_k}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (16)$$

したがって、渦系の運動は質点系の運動と数学的には同等である。ただし、通常の力学では位相空間は座標と運動量から構成されるが、渦系の場合は、実空間と位相空間が同じという特殊な例になっている。

実験で位相空間を直接観測するのは、まず不可能に近い。この例のように、位相空間と実空間が同じになっているのは、非常に希なケースである。渦系の運動を実空間で観測すれば、それがそのまま位相空間を観測していることになる。ハミルトン系のカオスの研究などでは、位相空間を直接観測する必要があるが、実験で直接観測された例はきわめて少ない。したがって、保存系カオスの実験は散逸系カオスの実験に比べ非常に少ない。位相空間が実空間と同じになるもう1つの例は、磁力線の構造である。磁力線の“運動”方程式もハミルトンの正準方程式で書き表すことができる。

4. ドリフト渦

すでに述べたように、プラズマ中の渦運動の形成は $E \times B$ ドリフトによる回転が最も重要である。ドリフト波によって作られる渦を考えてみよう。ドリフト波は、密度勾配によるドリフト(反磁性ドリフト)によって密度揺動が磁場に垂直方向に伝播する静電波である。密度に不均一があれば容易に励起され、プラズマ中に普遍的に存在する静電揺動であると考えられている。ドリフト波が発生するメカニズムの詳細については、F.F. Chen の教科書にわかり易い説明が与えられている。[8]

磁場方向にはプラズマは一様で、粘性も0であるとしよう。イオンの渦度方程式を考える。渦度方程式(5)は

$$\frac{\partial(\omega + \Omega)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla(\omega + \Omega) - (\omega + \Omega) \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (17)$$

となる。連続の式 $\nabla \cdot \mathbf{v} = -(d/dt) \log n$ を用いて $\nabla \cdot \mathbf{v}$ を消去すると、

$$\frac{d}{dt}(\omega + \Omega) - (\omega + \Omega) \frac{d}{dt} \log n_i = 0 \quad (18)$$

$E \times B$ ドリフトによる運動は磁場方向にのみ渦度を発生するので、両辺に e_z をかけると、

$$\frac{d}{dt} \log \left(\frac{\omega + \Omega}{n_i} \right) = 0 \quad (19)$$

となる。これはイオンの(流体粒子の)運動に伴って $\log[(\omega + \Omega)/n]$ が保存されることを表しており、ポテンシャル渦度(渦位)の保存則という。イオンの渦運動の周期 $1/\omega$ はサイクロトロン周期 $1/\Omega$ に比べて十分遅いとする ($\omega \ll \Omega$) ポテンシャル渦度保存則は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\omega}{\Omega} - \log n_0(x) - \frac{\delta n}{n_0} \right) = 0 \quad (20)$$

と書ける。ここで $n_0(x)$ は初期プラズマ分布、 δn は摂動密度である。イオンの運動が $E \times B$ ドリフトによるので時間微分は

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{c}{B} (\mathbf{e}_z \times \nabla \Phi) \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{c}{B} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right] \quad (21)$$

となり、ポアソン括弧式で表現できる。ここでポテンシャル Φ は初期ポテンシャル分布と摂動ポテンシャルの和をあらわしているが($\Phi = \phi_0(x) + \phi$)、これを代入すると時間微分は

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} - v_E \frac{\partial}{\partial y} + \frac{c}{B} [\phi,] \quad (22)$$

となる(ϕ_0 は x のみに依存することに注意)。ここで v_E は $E \times B$ ドリフト速度の絶対値、 $[\phi,]$ はポアソン括弧式である。流体運動の渦度 ω は

$$\omega = \text{rot} \left(\frac{c}{B} \mathbf{e}_z \times \nabla \Phi \right) \cdot \mathbf{e}_z = \frac{c}{B} \Delta \Phi \quad (23)$$

である。初期ポテンシャル分布 $\phi_0(x)$ は x の1次関数であるとする

$$\omega = \frac{c}{B} \Delta \phi \quad (24)$$

と書ける。これは初期分布が渦なし流れであることに対応している。ポテンシャル渦度保存則にこれらの式を代入すると

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - v_E \frac{\partial}{\partial y} + \frac{c}{B} [\phi,] \right] \left(\frac{c}{\Omega B} \Delta \phi - \log n_0(x) - \frac{e\phi}{T_e} \right) = 0 \quad (25)$$

簡単のため、温度は一定とすると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - v_E \frac{\partial}{\partial y} \right) (\phi - \rho_s^2 \Delta \phi) + v_* \frac{\partial \phi}{\partial y} = \Omega \rho_s^2 [\phi, \rho_s^2 \Delta \phi] \quad (26)$$

ここで $e\phi/T_e \rightarrow \phi$ と置いて無次元化している。 $\rho_s = C_s/\Omega$ は等価ラーマー半径である。電子は、初期圧力分布によって $E \times B$ ドリフトとは反対方向に反磁性ドリフトを行うが、その速度の大きさ $|(C_s^2/\Omega)(\partial/\partial x) \log n_0(x)|$ をここでは v_* と置いている。さらに、さきほどと同じように、 $\Omega t \rightarrow t$; $x, y/\rho_s \rightarrow x, y$ および $v_E, v_*/C_s \rightarrow v_E, v_*$ と規格化すると

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - v_E \frac{\partial}{\partial y} \right) (\phi - \Delta \phi) + v_* \frac{\partial \phi}{\partial y} = [\phi, \Delta \phi] \quad (27)$$

を得る。この方程式は長谷川-三間方程式と呼ばれる非線形方程式で、ドリフト渦の振舞いを記述する。惑星流体中の非線形ロスビー波を記述する Charney 方程式も同じ形式をもっており、Charney-Hasegawa-Mima(CHM)方程式と呼ばれることもある。[9] この方程式は渦解を持っている。

Larichev と Reznik にしたがって渦解を求めてみよう。[10] y 方向に一定速度 u で進む定常解を考える。(27)式に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [\Delta\phi - (u + v_E - v_*)x] \frac{\partial}{\partial y} [\phi - (u + v_E)x] \\ - \frac{\partial}{\partial x} [\phi - (u + v_E)x] \frac{\partial}{\partial y} [\Delta\phi - (u + v_E - v_*)x] = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

この式は一見複雑そうに見えるが、ポアソン括弧式 $[A, B] = 0$ になっていることに注意する。ポアソン括弧式は片方がもう一方の関数 $A = F(B)$ になっていれば恒等的に満たされる。そこで

$$\Delta\phi - (u + v_E - v_*)x = F[\phi - (u + v_E)x] \quad (29)$$

を要請しよう。F としては最も簡単な $const. \times (u + v_E)x$ を取るが、無限遠で十分早く 0 に収束させるため、渦の中心と外側を分けて解き、両者を接続して解を構成しよう。

$$\begin{cases} \Delta\phi - (u + v_E - v_*)x = p^2[\phi - (u + v_E)x] & r = \sqrt{x^2 + y^2} > a \\ \Delta\phi - (u + v_E - v_*)x = -q^2[\phi - (u + v_E)x] & r = \sqrt{x^2 + y^2} < a \end{cases} \quad (30)$$

まず、渦の外側から解いてみよう。渦の中心から十分遠ければ、 ϕ は等方的になるはずだから、 r 依存性はあっても x 依存性はないであろう、

即ち

$$p^2 = \frac{u + v_E - v_*}{u + v_E} \quad (31)$$

であれば良い。この時、 $\Delta\phi = p^2\phi$ となり ϕ は A を任意定数として変形ベッセル関数を用いて以下のように求まる

$$\phi(r, \theta) = AK_1(pr) \cos\theta \quad (32)$$

ここで $K_1(z)$ は 1 次の変形ベッセル関数で、無限遠では指数関数的に 0 に収束する。渦の内側の解は、 $\Delta\phi = -q^2\phi$ の一般解と特解の和で構成する。一般解の部分は前と同様にしてベッセル関数 $J_1(z)$ で表すことが出来る。特解部分は、 $x = r \cos\theta$ と置き、2 次微分が 0 になるような r のべき乗解を求める。結果は

$$\phi(r, \theta) = \left(1 + \frac{p^2}{q^2}\right) (u + v_E)r \cos\theta + CJ_1(qr) \cos\theta \quad (33)$$

ここで C は任意定数である。これらの任意定数は、 $r=a$ におけるポテンシャル ϕ の連続性、および渦度の連続性 ($\Delta\phi$ の連続性) から決定できる。最終的に以下の解を得る。

$$\phi(r, \theta) = \begin{cases} (u + v_E) a \frac{K_1(pr)}{K_1(pa)} \cos\theta & (r > a) \\ (u + v_E) \left[r \left(1 + \frac{p^2}{q^2} \right) - a \frac{p^2}{q^2} \frac{J_1(qr)}{J_1(qa)} \right] \cos\theta & (r < a) \end{cases} \quad (34)$$

q は $r=a$ で周方向速度が連続 ($\nabla\phi$ が連続) であることから決定され、

$$\frac{J_2(qa)}{qa J_1(qa)} = -\frac{K_2(pa)}{pa J_1(pa)} \quad (35)$$

を解くことによって求めることが出来る。

ドリフト渦の数値実験は Makino らによって行われ、正面衝突に対して安定で、お互いに個性を保存することが明らかになった。[11] しかし、2次元的な衝突ではソリトンのような振舞いは示さない。一方、不安定系の非線形発展と構造形成に関する研究で散逸性ドリフト波不安定性の時間発展が数値的に調べられた。最初に、高波数のドリフト波の乱れた状態から出発すると、時間とともに次第に長波長の構造が生成され、最終的に双極渦が形成されることが明らかになった。[12] この数値実験結果は、ドリフト双極渦が2次元プラズマ乱流の基本構造を担うものであるとして注目を集めた。一方、これに反して、実験では双極渦の発生は確認されていない。単極ドリフト渦の実験は Hesthaven、Saeki によって報告されている。[3, 13] 単極ドリフト渦は、CHM 方程式の解ではないために安定ではなく、壊れながら伝播する。

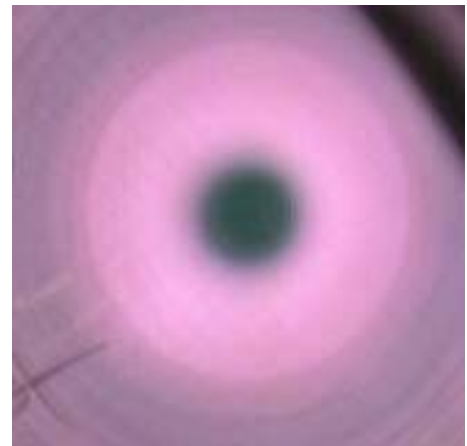
CHM 方程式は非線形方程式である。その解を線形方程式から求めることが出来るのは、CHM 方程式がポアソン括弧構造を持っているからである。ポアソン括弧式の恒等式を使うことによって線形方程式を解く問題に置き換えているのである。少なくとも特解はこのような手続きで求めることが出来る。

5 . 散逸性の渦

プラズマに粘性があると、これまで述べてきた渦とは質的に異なる渦の形態が可能になる。散逸性の渦はこれまでの渦研究とは異なって、まず実験において見つかった。[14] 最初に実験結果から説明しよう。

5-1 プラズマホール

実験で観測された渦の様子を図 5.1 に示す。この渦は円柱状ヘリウムプラズマ (直径 30cm、長さ 200cm) に形成されたもので、プラズマの一方の端から眺めたものである。中心付近に、ちょうど台風の目のように、暗い穴が形成されている。穴の部分の直径は約 6cm で、自発的に形成され、また条件を一定に保つと安定にこの構造を維持する。この



パターンはプラズマホールと名づけられた。暗い部分は、周囲のプラズマ密度に比べて約 1/10 になっており、両者の境界ではイオンラーマ-半径の数倍程度の距離にわたってきわめて急峻な密度勾配が形成されている。

磁力線に垂直な断面におけるプラズマの流れ場を測定したものが図 5.2 である。[15] この図からわかるように、プラズマホールの速度場は単極の吸い込み渦になっている。また、周方向、径方向ともにイオン音波速度程度の速さで流れている。特に径方向にこのような速さで流れているのは驚きである。(プラズマが磁力線に垂直方向に動きにくいということは、たいていの教科書に書いてある!!!) 磁場を反転すると、周方向回転は反転するが、径方向流れは内向きのまま変化しない。この事実は、周方向流れは $E \times B$ ドリフトで決まっているが、径方向流れは $E \times B$ ドリフト以外の機構で維持されていることを示している。実際ポテンシャル構造を測ってみると、ホールの部分は最大 110V ($\sim 5T_e$) の釣鐘状のポテンシャル分布をしていて、電場強度は最も強いところで $\sim 40V/cm$ になっている。周方向回転はこの強烈な電場による $E \times B$ ドリフトによって駆動されている。回転速度の径方向分布は、中心部で剛体的(半径に比例) 周辺部で渦なし流れ(半径に反比例)になる傾向がある(図 5.3 参照)。径方向速度の空間分布は図 5.4 に示すように中心部で半径に比例する内向き流れであることを示している。

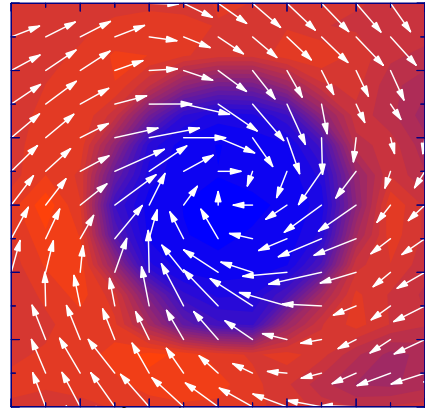
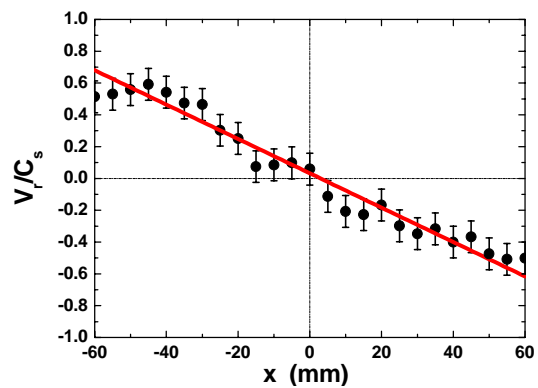
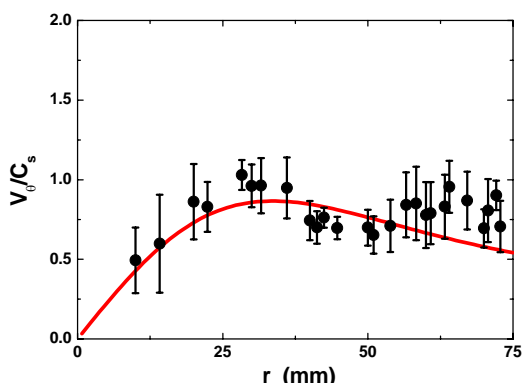


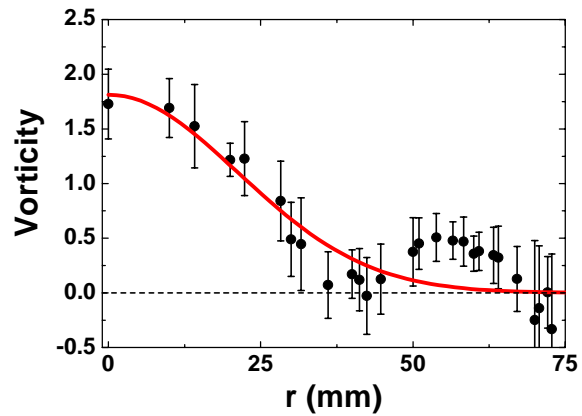
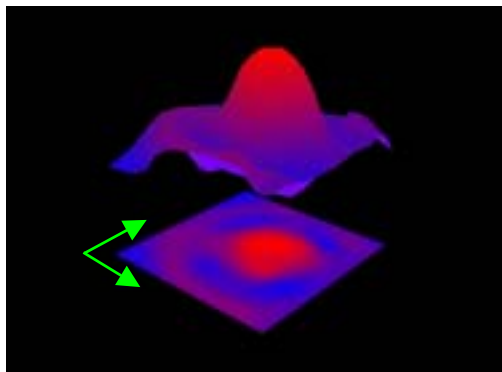
Fig.5.2 プラズマホールの 2 次元速度場



渦度分布の z 成分は、図 5.2 に示した 2 次元速度ベクトル場のデータから積分公式

$$\omega = (\text{rot } \mathbf{v})_z = \frac{\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} \quad (36)$$

を使って求めることが出来る（微分はわずかなノイズにも敏感なので、積分公式を利用する）。積分経路は 4 つの最近接ベクトルを含む最小の正方形を取る。 ΔS はその面積である。図 5.5 および図 5.6 に示すように渦度分布は中心付近に集中しており、その分布はガウス型分布(実線)でよく近似される。また、周辺部分の渦度はほとんど 0 に近い。



このような渦度の局在構造はどのようにして可能になるのだろうか？次節では渦度のダイナミクスを考えてみる。

5 - 2 渦度の定常局所構造 (バーガース渦)

プラズマには一定の外部磁場が z 軸方向に加えられており、密度、温度などは z 軸方向に変化しないとする。磁場に垂直な面内の流れは周方向に一様であるとする ($m=0$)。流れは、渦なし流れ $(-\alpha r, 0, v_z(z))$ と渦度を作る流れ $(0, v_\theta(r), 0)$ の和で書けるとする。径方向の流れは中心に向かう収束流を仮定している。 α は中心収束流の強さを表すパラメーターである。 z 軸方向流れを考慮しているのは、収束流があるために、中心に集まってきた流れは z 軸方向に逃げなければならないためである(速度場は 3 次元であることに注意)。ここでは、中心収束流を仮定して話をはじめますが、中心収束流および結論として得られる渦の流れは、すべて矛盾なく基礎方程式を満たしていることが示される。即ち、ここで求める流れ場は渦度方程式の一つの解になっている [16]。

速度ベクトルは

$$\mathbf{v} = (-\alpha r, v_\theta(r), v_z(z)) \quad (37)$$

この流れによる渦度は z 成分のみで表せて

$$\boldsymbol{\omega}(r) = (0, 0, \omega(r)) \quad (38)$$

と書ける。渦度方程式(5)をもう一度書くと

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \boldsymbol{v} - \boldsymbol{\omega} \nabla \cdot \boldsymbol{v} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega} \quad (39)$$

この渦度方程式に(38)を代入すると

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \alpha r \frac{\partial \omega}{\partial r} = 2\alpha \omega + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) \quad (40)$$

を得る。

ここで各項の意味を見ておこう。まず左辺第 1 項と第 2 項だけを釣り合わせると $\omega(r) = F(re^{\alpha t})$ となる。ここで F は任意関数である。この関数の意味は、 $t=0$ で $r=r_0$ における渦度 ω の値が $t=t$ には、 $r=r_0 e^{-\alpha t}$ の位置に移動していることを示している。さらに $t \rightarrow \infty$ では原点に収束する。これは中心に向かう流れによって渦が原点に集められる効果をあらわしている。左辺第 1 項と右辺第 1 項を釣り合わせると $\omega = \omega(0)e^{2\alpha t}$ となり、初期時刻の渦度 $\omega(0)$ が $e^{2\alpha t}$ で増大することを示している。これは、渦度方向に流れが引伸ばされることによる、渦度の強化を表している。右辺第 2 項は粘性項であり、この項により局在化した渦度は拡散(平坦化)される。

中心収束流による渦度の集中効果は $F(re^{\alpha t})$ という相似解をもたらすことに注意しよう。今、空間が $re^{\alpha t}$ のように時間とともに拡大されるような新しい座標を導入する。[17]

$$r' = re^{\alpha t} \quad (41)$$

また同時に、渦度 ω の強さも

$$\omega' = \omega / e^{2\alpha t} \quad (42)$$

を導入する。この新しい変数と渦度の組を用いて(40)式を表すと

$$\frac{\partial \omega'}{\partial \tau} = \nu \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} r' \frac{\partial \omega'}{\partial r'} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega'}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \omega'}{\partial \eta^2} \right) \quad (43)$$

が得られる。ここで、 ξ, η は新しい変数空間における直角座標である ($r' = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$)。上の式は拡散方程式であり、解そのものは容易に見つけることができる。

$$\omega'(r', t') = \frac{1}{4\pi\nu t'} \iint \omega_0'(\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}) \exp\left[-\frac{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2}{4\nu t'}\right] d\xi_1 d\eta_1 \quad (44)$$

ここで、 ω_0 は初期時刻における渦度分布である。もとの座標系 (r, t) と渦度に戻すと、

$$\omega(r, t) = \frac{\alpha}{2\pi\nu(1-e^{-2\alpha t})} \iint \omega_0(\sqrt{x_1^2 + y_1^2}) \times \exp\left(\frac{(x-x_1e^{-\alpha t})^2 + (y-y_1e^{-\alpha t})^2}{2\nu/\alpha(1-e^{-2\alpha t})}\right) dx_1 dy_1 \quad (45)$$

初期分布には色々な状態が考えられるが、任意の初期値に対して、(45)式で表される渦度分布は $t \rightarrow \infty$ でガウス分布に漸近することが示される(ここでは証明は省く)。

$$\omega(r) = \frac{\Gamma}{\pi l^2} \exp\left[-\frac{r^2}{l^2}\right] \quad (46)$$

Γ は初期時刻における循環 $\Gamma = \int 2\pi r \omega dr$ である。渦の空間的な特性長は中心収束流の強さ α と粘性 ν による平坦化の強さの比の平方根で与えられ

$$l = \sqrt{\frac{2\nu}{\alpha}} \quad (47)$$

となる。収束流が強ければ l は小さくなり、中心部に局在した渦度分布となる。逆に、粘性による拡散が強ければ l は大きくなり、なだらかな分布となる。この渦は、バーガース(Burgers 1948年)によって発見されたもので、バーガース渦(Burgers Vortex)と呼ばれている。

ナビエ・ストークス方程式の発見は 1827 年である。渦度の概念は、1841 年 Cauchy によって出されている。しかしバーガース渦に至るのは 1948 年である。実にナビエ・ストークスから 120 年後のことである。私は、バーガース渦の発見は 1848 年と確信していた。1948 年の間違いだと気づいたのは、つい最近である。渦の道程のなんと遠いことか。

ガウス型の渦度分布が求まったので、これから周方向速度の分布を求めることができる、

$$v_\theta(r) = \frac{1}{r} \int \omega r dr = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - \exp\left[-\frac{r^2}{l^2}\right]\right) \quad (48)$$

周方向の速度分布は、中心部では剛体的回転($v_\theta \propto r$, $r \ll l$)で、周辺部では半径に反比例する($v_\theta \propto 1/r$, $r \gg l$)。この $1/r$ の速度場は渦糸が誘起する速度場と同じである。さて図 5.4, 5.6 に示した実線はそれぞれ(48) (46)式に Γ をフリーパラメータとしてプロットしたものである。実験データとの一致は良いといえる。これらの結果と半径に比例する中心収束流の存在(図 5.3)から、プラズマホールはバーガース渦であるという結論が得られる。

いま、粘性が 0 になる極限を考えてみよう、この場合、集中する渦度を拡散させる機構はない。 $v \rightarrow 0$ で(46)式はデルタ関数になり

$$\omega(r) = \frac{\Gamma}{\sqrt{\pi}l} \delta(r) \quad (49)$$

$\Gamma/\sqrt{\pi}l$ の強さを持つ渦糸になる。即ち、バーガース渦は、粘性による渦度拡散があるために、有限の幅を持ってしまった「渦糸」であると考えることが出来る。

粘性が有限であるということは、流体粒子に内部摩擦が働くことを意味している。周方向速度分布には図 5.4 に示すように速度シアアがある。この速度シアアによって、周方向に回転するプラズマは粘性抵抗力 F_θ を受けることになる。この抵抗力による $F \times B$ ドリフトを求めてみる。運動方程式の θ 成分から v_r を求めると、

$$v_r = v \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) - \frac{v_\theta}{r^2} \right] / \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} + \frac{eB}{M} \right] \quad (50)$$

となる。この式の分子は、 θ 方向の粘性抵抗力 $(v \Delta v)_r$ である。分母の第 1 項と 2 項は対流項 $(v \cdot \nabla v)$ からくるものであり、これを落とすと通常の $F \times B$ ドリフトの表式が得られる。したがって、この式は非線形項まで含めた $F \times B$ ドリフトの表式であると考えることが出来る。上式に周方向速度分布(48)を代入すると、

$$v_r = -\frac{2v}{l^2} r = -\alpha r \quad (51)$$

となり、最初に仮定した半径に比例する中心収束流が得られる。即ち、径方向流れは周方向回転する流れが粘性によって駆動する $F \times B$ ドリフトなのである。

ここまで分つてくると、当初解釈のつかなかった実験結果も理解できるようになる。磁場反転に対して、 θ 方向の流れが向きを変えるのは、 $E \times B$ ドリフト中の B が符号を変えるからである。 r 方向の流れが磁場反転しても変わらないという事実は、当初解釈ができなかった。磁場を反転すると θ 方向の回転が逆転し、 F も符号を変える、結局 B も F も符号を変えることになり $F \times B$ ドリフトは変化しない。 r 方向の流れは $E \times B$ で流れているのではなく粘性力によって駆動されているのである。これでようやく矛盾がとけた。物事が分るきっかけを掴むと、いままで疑問だったことが、いっせいに見えてくることがある。研究者になってよかったと実感する瞬間である(ただし、このようなことは頻繁にあるわけではない)。

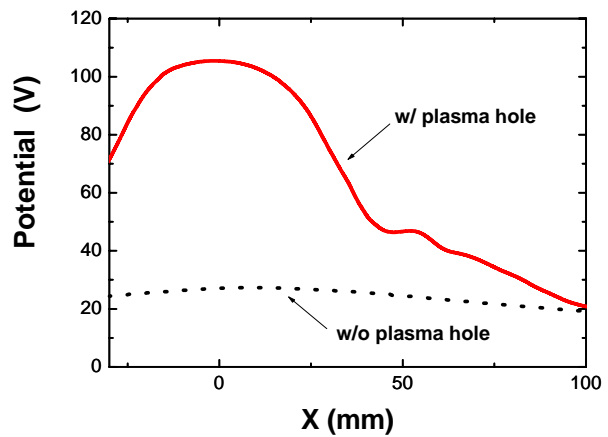
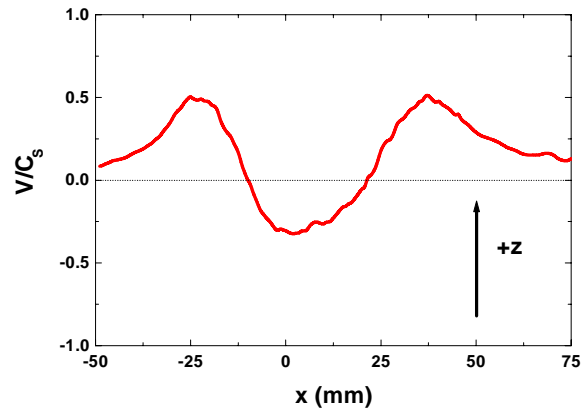
プラズマホールは、渦度の局在化という点ではバーガース渦である。言い換えれば、粘性流体に共通の渦構造であると言ってよい。しかし、プラズマホールは、プラズマに特有の現象と共存している実体であることも明らかになっている。

5-3 プラズマに固有の現象

まず第1に、プラズマホールが通常流体中のバース渦と異なる点は、中心部に深い密度の穴を形成していることである。しかもこの密度の穴はたかだかイオンラーマー半径の数倍の距離で周りのプラズマと隔てられている。このような急峻な勾配はどのような機構で支えられているのだろうか？

図5.7にz軸方向(磁場方向)の流れを示しているが、中心部のホール部分と周辺部では逆向きに流れていることが分る。図5.2に示した速度ベクトルとあわせて考えると、速度ベクトルは、ホールの境界をはさんで $\theta-z$ 面内で回転(回転不連続)していることになる。回転不連続性は、衝撃波の特徴の一つであり、プラズマホールの密度の壁は衝撃波面によって維持されている可能性がある。

さらに、プラズマホールのポテンシャルもまた通常のプラズマとは著しく異なっている。図5.8にポテンシャル分布を示しているが、プラズマホールが形成されない場合のポテンシャル分布と比較するとその違いが良く分かる。ポアソン方程式を用いて、このポテンシャルがどれだけの密度のずれ(非中性度)から形成されているか概算してみる。ポアソン方程式は



$$\nabla^2\phi = -4\pi e\delta n, \quad \delta n = n_i - n_e \quad (52)$$

と書ける。プラズマの特性長(半径)とデバイ長をそれぞれ a, λ_D とすると。(52)式から

$$\frac{\delta n}{n} \approx \left(\frac{\lambda_D}{a} \right)^2 \quad (53)$$

と見積もることができる。この値は、通常のプラズマでは 10^{-6} 程度であるが、プラズマホールでは、約 10^{-3} になっている。つまり、ホールの部分は通常のプラズマに比べて約1000倍程ほど準中性条件が破れたプラズマになっていることになる。このようなプラズマが自然に発生し、周辺の準中性プラズマと共存しているのは非常に興味深い。図5.9にポアソン方程式を用いて計算した $\delta n/n$ のカラーマップを示している。ホールと周辺プラズマの境界面にはプラスとマイナス電荷が2層構造

を形成している。この層が急峻な密度の壁を支えるのにどのような役割を担っているかは、明らかになっていない。

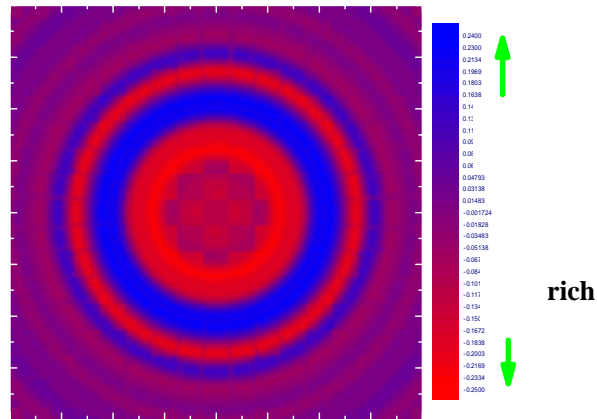


Fig.5.9 非中性度 カラーマップ。中心はプラス、その外側にマイナスとプラスの層が交互に現れている。

バーガス渦の大きさは粘性係数の平方根に比例している。中心収束流の速さは測定できるので、渦のサイズと径方向速度を測ればプラズマの実効的な粘性係数 ν を求めることが出来る。プラズマホールの場合、得られた値は $2 \times 10^6 \text{ cm}^2 / \text{sec}$ である。粘性が古典的な衝突（この場合イオン 中性粒子）で決まるとすれば予想される粘性係数の値は $\sim 10^2 \text{ cm}^2 / \text{sec}$ であり、観測された値はそれよりも4桁も大きな異常粘性を示している。異常粘性の問題はプラズマ物理にとって基本的に重要な問題であるが、詳細な研究は今後の課題である。参考までに色々な物質の粘性係数を以下に示す。

水	1×10^{-2}	cm^2 / sec
空気	1×10^{-1}	cm^2 / sec
グリセリン	6.8	cm^2 / sec
プラズマ（古典的衝突）	$\sim 1 \times 10^2$	cm^2 / sec
磁場閉じ込めプラズマ（異常粘性）	$\sim 1 \times 10^4$	cm^2 / sec
プラズマホール（異常粘性）	$\sim 1 \times 10^6$	cm^2 / sec

Table-1 色々な物質の動粘性係数

プラズマホールは、中心収束流による渦度の集中と粘性による渦度の拡散が釣り合って定常な渦構造を形成したものである。したがって現象の普遍性に着目するならば、プラズマ中でも他の粘性流体と同様に、散逸性渦（バーガス渦）が発生するという結論に至る。しかし、この渦を支える個別の現象は、通常流体の場合と違って多彩な物理を含んでいる。最も大きな特徴は密度ホールで

ある。通常流体では、ほとんどの場合非圧縮性なので、このようなことはまず起こらない。密度ホールは回転不連続性を伴う衝撃波面によって維持されていると考えられ、さらにホールの中では準中性条件が破れることによって非常に高いポテンシャルが形成されている。この高いポテンシャルは周辺プラズマのそれにつながっていくが、その境界では細胞膜にも似た正負電荷の2重層が形成されている。実効的な粘性係数は古典的衝突から決まる値に比べ4桁も大きな異常粘性を示し、結果として巨視的なサイズのバーガス渦の出現を可能にしている。今後に残された課題は多いが、プラズマホールは粘性流体としての普遍的構造とプラズマの強い個性とが共存する特異な存在として、その全体像が明らかになってくるだろう。

最後に2点ほど指摘しておこう。

「2次元」か「3次元」か？ 渦糸にしてもドリフト渦にしても2次元の速度場によって作られる渦であり、純粋に2次元構造である。一方、プラズマホールは、“渦度”の観点からは確かに2次元構造であるが、それは3次元の速度場によって支えられている。粘性が無視できなければ、内向きの収束流が発生し、中心に集まってきた流れは軸方向の流れを発生させるからである。したがって、流れ場は必然的に3次元にならざるを得ない。もし、プラズマの粘性が本質的な役割を果たしているならば、最も基本的な渦構造は、純粋に2次元の速度場を持つものではなく、3次元の速度場を持つ2次元の“渦度場”ではないだろうか。

「回る渦」と「構造としての渦」 プラズマ中に局在するポテンシャルがあれば $E \times B$ ドリフトによる回転が発生するので渦である、とはじめに述べた。これは、回るものは渦であるという考え方であり、これまで共通に受け入れられてきた考え方でもある。一方、散逸性の渦は、渦度の集中と拡散(構造化と反構造化)のバランスで形成されるものであり、渦をこのような視点から、即ち「構造としての渦」という立場から考えることができるのではないだろうか。ちょうど1次元ではソリトンがそうであるように、基本構造は二つの相反する効果の競合の中に生まれる。多次元基本構造としての渦が同じシナリオで書かれていたとしても不思議ではない。

参考文献

- 1) 「渦 自然の渦と工学における渦」 Hans J. Lugt (朝倉書店 1979)。
- 2) 別冊「数理科学」ソリトン (サイエンス社 1985年)。
- 3) 小特集「プラズマ中の渦とその相互作用」ドリフト波の渦(佐伯紘一)
プラズマ核融合学会誌 Vol.77 (2001) 327。
- 4) 小特集「プラズマ中の渦とその相互作用」非中性プラズマの渦(際本泰士)
プラズマ核融合学会誌 Vol.77 (2001) 338。
- 5) 小特集「プラズマ中の渦とその相互作用」プラズマ核融合学会誌, Vol.77 (2001) 327-371。
- 6) L.D. Landau and E.M. Lifshitz, Fluid Mechanics
(Butterworth, 1987) Chap.1

- 7) 「流体力学 30 講」 戸田盛和 (朝倉書店 1994 年) 第 16 講.
- 8) F.F. Chen Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion Vol.1
Plasma Physics, (Plenum Press, New York , 1984) Chap. 6 .
- 9) A. Hasegawa and K. Mima, Phys. Fluids , 21 (1978) 87.
- 10) V.D. Larichev and G.K. Reznik, Polymode News, 19 (1976) 3.
- 11) M. Makino, T. Kaminura and T. Taniuchi, J. Phys. Soc. Japan,
50 (1981) 980
- 12) M. Kono and E. Miyashita, Phys. Fluids, 31 (1988) 326
- 13) J.S. Hesthaven, J.P. Lynov, J.J. Rasmussen and G.G. Sutyrin,
Phys. Fluids A5 (1993) 1674.
- 14) K. Nagaoka, A. Okamoto, S. Yoshimura, M. Kono, and M.Y. Tanaka,
Phys. Rev. Lett., 2002 in press.
- 15) K. Nagaoka, A. Okamoto, S. Yoshimura, and M.Y. Tanaka,
J. Phys. Soc. Jpn, 70 (2001) 131.
- 16) 「流体力学 安定性と乱流」神部 勉, P.G. ドレイジン
(東京大学出版会 1998) 第 14 章.
- 17) T. Kambe, J. Phys. Soc. Jpn. 53, (1983) 13.